計算機システム

自習 APDX01:ブール代数と基本論理素子

http://archlab.naist.jp/Lectures/ARCH/x01/apdx01j.pdf

ブール代数

- ブール代数 (**Boolean algebra**)
  - 二値理論の問題を扱う数学
  - 論理回路の解析や設計に不可欠な数学的道具

- 命題の真偽を表す
  - 真　→　1
  - 偽　→　0
  - “1”, “0”:真理値　または　論理値

例題

- 命題
  - **A:X** は**2**の倍数である
  - **B:X** は**3**の倍数である
- **X**が**1**～**10**の値とすると．．．

ブール代数の基本演算

- 論理積(AND)　・・・かつ・・・
  - Xは2の倍数であり，かつ3の倍数である
- 論理和(OR)　・・・または・・・
  - Xは2の倍数であるか，または3の倍数である
- 否定(NOT)　・・・ではない
  - Xは2の倍数ではない

真理値表

- 二つの論理変数**A, B**の場合
  - 真理値の組合せは**[0,0], [0,1], [1, 0], [1, 1]**の４つ

A	B	Z
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

三つの論理変数
A, B, Cの場合は？

基本論理演算（AND）

- Z＝A・B　（論理積）
  - A,B:論理変数
  - “・”:論理積を表す演算記号

A	B	Z＝A・B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

基本論理演算（OR）

- Z＝A＋B　　（論理和）
  - A，B：論理変数
  - “＋”：論理和を表す演算記号

A	B	Z＝A＋B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

基本論理演算（NOT）

- $Z = \overline{A}$　（否定）
  - A: 論理変数
  - “—”: 否定を表す演算記号

A	$Z = \overline{A}$
0	1
1	0

論理式

- 論理変数と演算記号で表された式

A	B	$Z=f(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

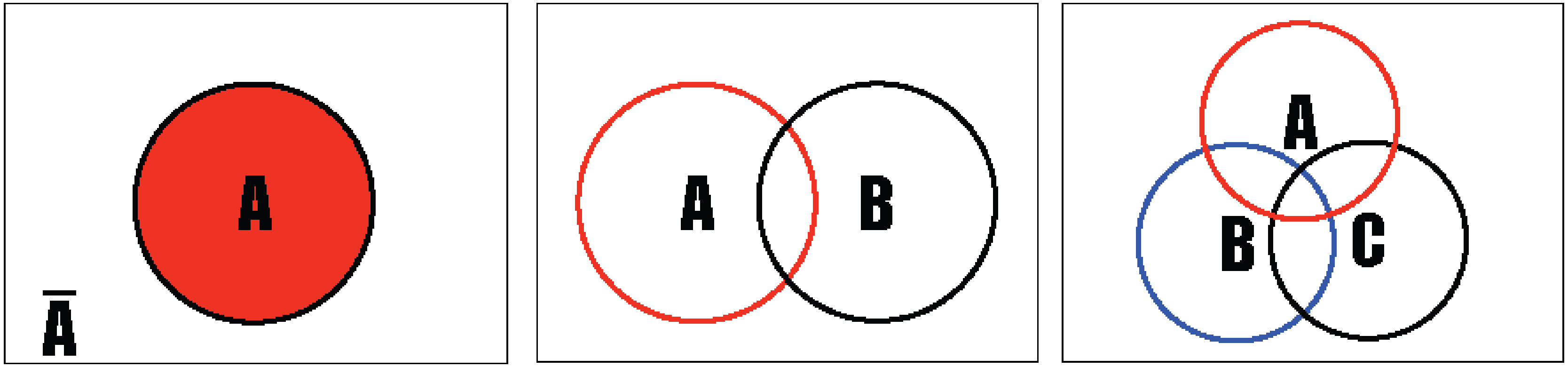
論理関数

$$Z = f(A, B) = \bar{A}B + A\bar{B}$$

論理式

ベン図 (Venn Diagram)

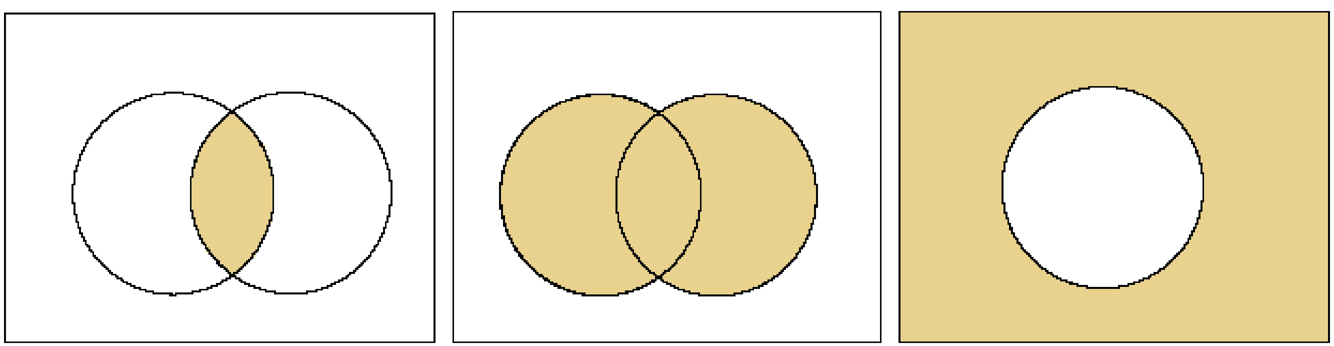
- 演算を直感的に理解しやすい
  - 集合の演算



和集合：$A \cup B$
積集合：$A \cap B$
補集合：$\bar{A}$

ベン図による論理演算の表現

- 円の中を1 (A)，円の外を0 ($\bar{A}$)
- 論理積 A•B ⇔ 積集合A∩B
- 論理和 A+B ⇔ 和集合A∪B
- 否定 $\bar{A}$ ⇔ 補集合 $\bar{A}$



A•B　　A+B　　$\bar{A}$

ブール代数の公理

- すべての変数Ａは，１または０
- $A+1=1+A=1$
- $A\cdot 0=0\cdot A=0$
- $A+0=0+A=A$
- $A\cdot 1=1\cdot A=A$
- $\overline{0}=1$
- $\overline{1}=0$

ブール代数の定理(1)

- べき等則
  - $A+A=A$ (1)
  - $A \cdot A=A$ (2)
- 補元則
  - $A+\overline{A}=1$ (3)
  - $A \cdot \overline{A}=0$ (4)
- 交換則
  - $A+B=B+A$ (5)
  - $A \cdot B=B \cdot A$ (6)
- 対合則
  - $\overline{\overline{A}}=A$ (7)

NAIST

ブール代数の定理(2)

- 結合則
  - $(A+B)+C=A+(B+C)$ (8)
  - $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (9)
- 分配則
  - $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ (10)
  - $A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$ (11)
- 吸収即
  - $A+A\cdot B=A$ (12)
  - $A\cdot(A+B)=A$ (13)

ブール代数の定理 (3)
ド・モルガン

- $\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$　　(14)
- $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$　　(15)

例題

- 分配法則 $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$（式 11）を真理値表およびベン図を用いて証明せよ

- ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ （式15）を，真理値表およびベン図を用いて証明せよ．

定理を用いた論理関数の簡単化

- ブール代数の定理を用いて簡単化する
- 例題
  - $Z = A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
  - $Z = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

基本論理回路への対応付け

基本論理回路

- 基本論理演算（**AND**，**OR**，**NOT**）を実現する基本論理回路は **AND** 回路, **OR** 回路, **NOT** 回路
- 論理回路→入力状態で出力を決める
  “ゲート（門）”の働き
  - ゲート回路とも言われる

正・負論理

- 論理演算の値：**"0"，"1"**
- **0→OFF，1→ON** ⇒ 機械的なスイッチ

例えば
5Vや3.3V

- 電気信号で実現するには？
- 信号をあるレベル（しきい値）で比較
  - 大：**H（high）**レベル
  - 小：**L（low）**レベル
- **H** レベルを真理値**"1"**，**L** レベルを**"0"**
  - 正論理
- **H** レベルを真理値**"0"**，**L** レベルを**"1"**
  - 負論理

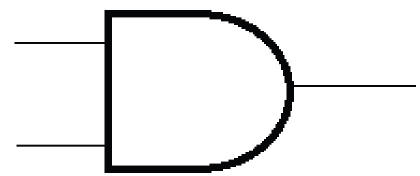
基本論理回路（AND） 1

- Z＝A・B　（AND回路，ANDゲート）

A	B	Z
0V	0V	0V
0V	5V	0V
5V	0V	0V
5V	5V	5V

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真理値表

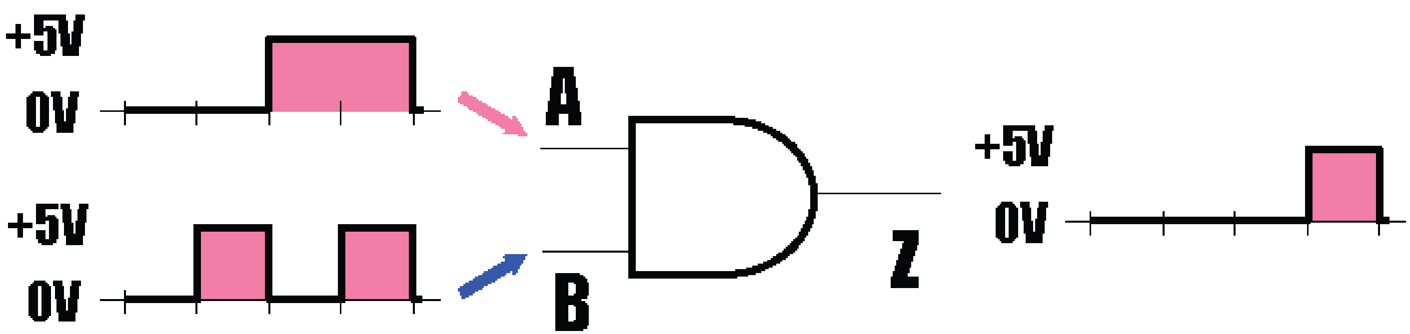


MIL記号

基本論理回路（AND） 2

- $Z = A \cdot B$

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



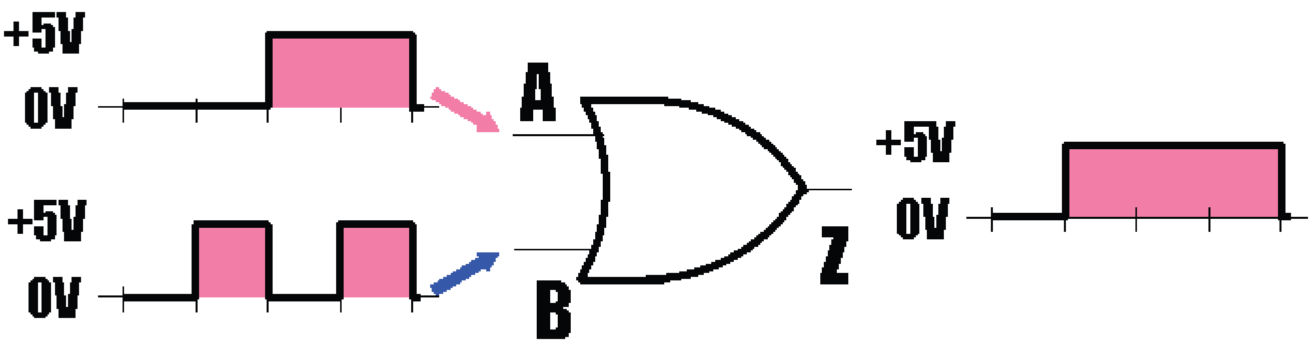
真理値表

基本論理回路（OR）

- Z = A + B （OR回路，ORゲート）

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

真理値表

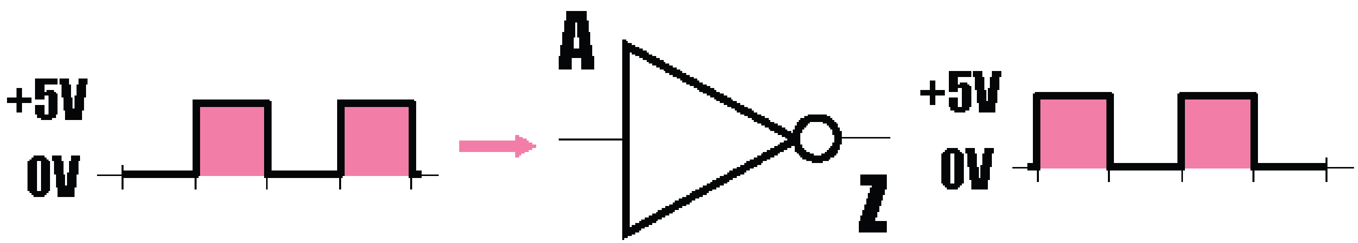


基本論理回路（NOT）

- $Z=\overline{A}$　　（NOT回路，　NOTゲート）

A	Z
0	1
1	0

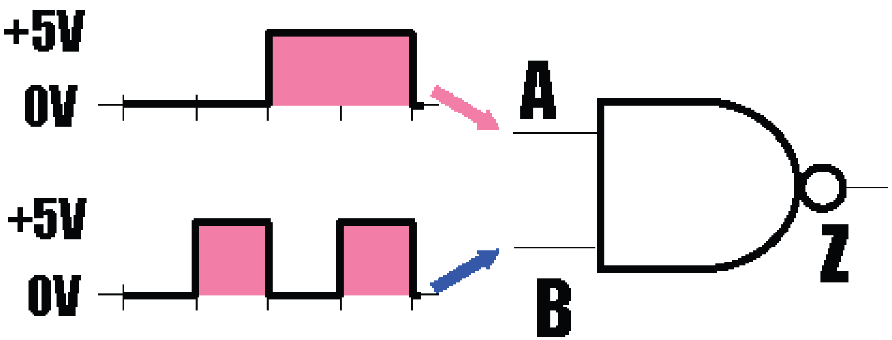
真理値表



重要論理回路（NAND）

- $Z = \overline{A \cdot B}$ （NAND回路，　NANDゲート）

A	B	Z
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



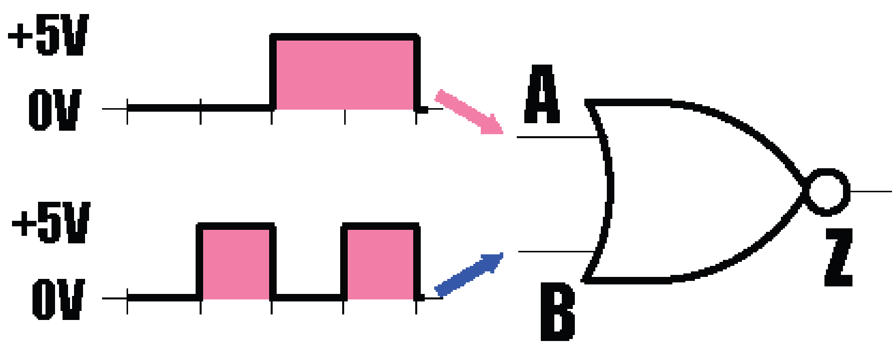
真理値表

重要論理回路（NOR）

- $Z = \overline{A + B}$ （NOR回路，NORゲート）

A	B	Z
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

真理値表

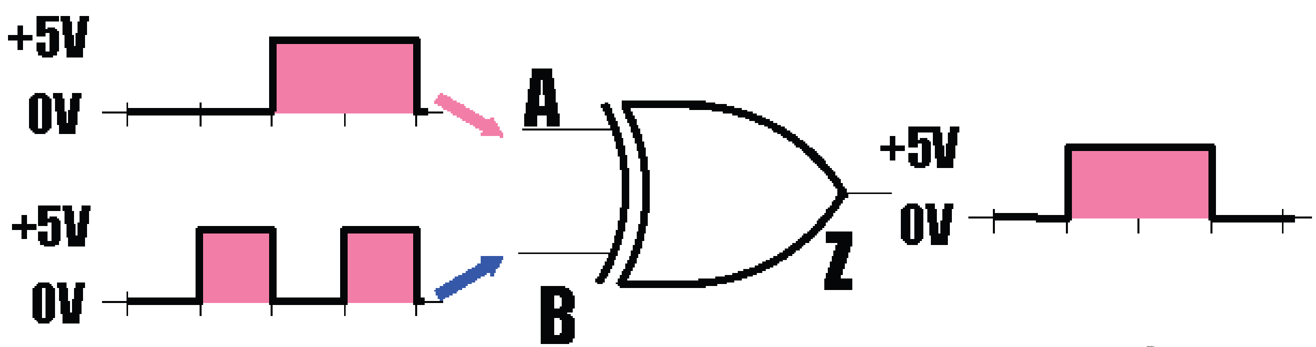


重要論理回路（XOR）

- $Z = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$（XOR回路，XORゲート）

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真理値表



論理式の標準形

標準化

- 回路はできるだけ簡単な方がいい
  - 経済的
  - 故障を減らせる
- 一定の形をした論理式

- 統一的な方法で簡単化が可能
  - 主加法標準形
  - 主乗法標準型

基本積と基本和（1）

- 論理変数が**A, B**の場合
  - 論理積：$AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$（基本積）
  - 論理和：$A+B, A+\bar{B}, \bar{A}+B, \bar{A}+\bar{B}$（基本和）
  - どちらかを基に論理式を表現できる！
- 出力が１になるもので論理式を表現
  →　論理積が基本
- 出力が０になるもので論理式を表現
  →　論理和が基本

基本積と基本和（2）

A	B	基本積	基本和
0	0	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$A+B$
0	1	$\bar{A}\cdot B$	$A+\bar{B}$
1	0	$A\cdot\bar{B}$	$\bar{A}+B$
1	1	$A\cdot B$	$\bar{A}+\bar{B}$

A	B	C	基本積	基本和
0	0	0	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$A+B+C$
0	0	1	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$	$A+B+\bar{C}$
0	1	0	$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$	$A+\bar{B}+C$
0	1	1	$\bar{A}\cdot B\cdot C$	$A+\bar{B}+\bar{C}$
1	0	0	$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$\bar{A}+B+C$
1	0	1	$A\cdot\bar{B}\cdot C$	$\bar{A}+B+\bar{C}$
1	1	0	$A\cdot B\cdot\bar{C}$	$\bar{A}+\bar{B}+C$
1	1	1	$A\cdot B\cdot C$	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

主加法標準形

- 真理値表の出力の真理値"1"に注目
- 真理値が"1"になっている箇所を基本積の和として表現

主加法標準形

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Z = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

主乗法標準形

- 真理値表の出力の真理値"0"に注目
- 真理値が"0"になっている箇所を基本和の積として表現

主乗法標準形

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Z = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

例題

- 次の真理値表を実現する論理式を，主加法標準形と主乗法標準形で求めよ
- 上記で求めた各論理式が等しいことを定理を利用して証明せよ

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

組合せ論理回路の設計

1. 回路の機能・動作条件から，入力・出力の対応を示す**真理値表を作成**
2. 真理値表より，入出力の対応を主加法標準形または主乗法標準形の**論理式で表す**
3. 求めた論理式を**簡単化する**
4. 簡単化した論理式の動作を実現する**組合せ回路を構成する**

カルノー図とは？

- 論理式の簡単化
  - ブール代数の定理を利用
  - 複雑なものは分かりにくい！
- 表を使った簡単化
- カルノー図

カルノー図（二変数）

- 二変数 **A, B** の場合

B \ A	0	1
0	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$A\cdot\bar{B}$
1	$\bar{A}\cdot B$	$A\cdot B$

簡単化の手順

- 真理値表の真理値が１となるセルに１を書く
- 隣接するセルの１を囲む
  - 同じ１を複数回使ってよい
- 各ループに対して**簡単化の規則**を適用
- 上記で得られた項の論理和を求める

簡単化の規則１

- ２個の隣接するセルの１を囲むループは，１個の変数で表す．

B＼A	0	1	
0	1	1	$\bar{B}$
1	1	1	B
	$\bar{A}$	A	

例題

- $Z = A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{B}$

カルノー図（三変数）

- 三変数 **A, B, C** の場合

A•B / C	00 $\overline{A}\cdot\overline{B}$	01 $\overline{A}\cdot B$	11 $A\cdot B$	10 $A\cdot\overline{B}$
0 $\overline{C}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1 C	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot C$	$A\cdot\overline{B}\cdot C$

簡単化の規則２

- ４個の隣接する１を囲むループ，２個の隣接する１を囲むループの順で簡単化
- ４個の隣接する１を囲むループは１個の変数とする
- ２個の隣接する１を囲むループは２個の変数とする

$\bar{B}$　　　B　　　$\bar{B}$

C　A,B	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\bar{A}\cdot B$	$A\cdot B$	$A\cdot\bar{B}$	
$\bar{C}$	1	1	1	1	$\bar{C}$
C	1	1	1	1	C

$\bar{A}$　　　A

例題

- $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$

カルノー図（四変数）

$C\cdot D$ \ $A\cdot B$	00 $\overline{A}\cdot\overline{B}$	01 $\overline{A}\cdot B$	11 $A\cdot B$	10 $A\cdot\overline{B}$
00 $\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$
01 $\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$
11 $C\cdot D$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$	$A\cdot B\cdot C\cdot D$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$
10 $C\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$	$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$

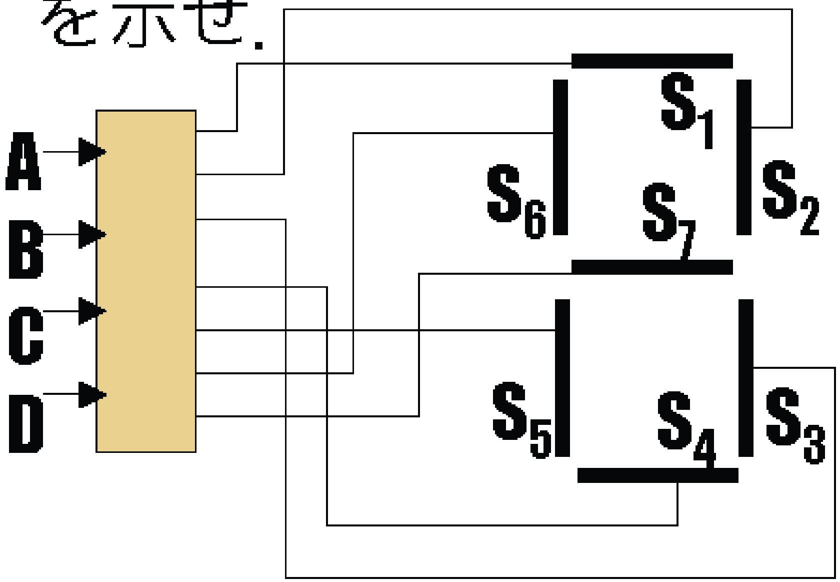
例題

A	B	C	D	Z
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

- 左の真理値表で表される論理式をカルノー図を用いて簡単化せよ．また，簡単化した論理式を回路図で表せ．

例題

- ７セグメントディスプレイ（16進用）の回路でセグメントS_1の駆動回路を設計せよ．また回路図を示せ．



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	b	C	d	E	F

今日はここまで